Programação e matemática não são a mesma coisa

Aula para disciplina de Métodos Formais

Gabriela Moreira

Departamento de Ciência da Computação - DCC
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC

07 de agosto de 2024

Conteúdo

Outline

Essa aula não é sobre

Essa aula não é sobre:

- “Precisa saber matemática pra programar?”
- “Quem tem base matemática programa melhor?”

. . . que muitas vezes são derivados de “precisa ter faculdade pra trabalhar com programação?”

Essa aula não é sobre

Essa aula não é sobre:

- "Precisa saber matemática pra programar?"
- "Quem tem base matemática programa melhor?"

... que muitas vezes são derivados de "precisa ter faculdade pra trabalhar com programação?"

Vocês estão cursando Ciência da Computação, então independente disso tudo, vão sim aprender uma base lógica/matemática.

Essa aula é sobre

Como matemática e programação se relacionam, e a importância de entender as diferenças.

Métodos Formais são sobre matemática ou sobre programação?

Essa aula é sobre

Como matemática e programação se relacionam, e a importância de entender as diferenças.

Métodos Formais são sobre matemática ou sobre programação?

Vamos trabalhar com ambos no mesmo ambiente, e o domínio sobre quando usar uma perspectiva ou outra é a principal habilidade para se escrever uma boa **especificação formal**.

Essa aula é sobre

Como matemática e programação se relacionam, e a importância de entender as diferenças.

Métodos Formais são sobre matemática ou sobre programação?

Vamos trabalhar com ambos no mesmo ambiente, e o domínio sobre quando usar uma perspectiva ou outra é a principal habilidade para se escrever uma boa **especificação formal**.

No geral, nós, programadores, tendemos à **perspectiva da programação**, e precisamos nos esforçar para descrever algumas coisas na **perspectiva matemática**.

Essa aula é sobre

Como matemática e programação se relacionam, e a importância de entender as diferenças.

Métodos Formais são sobre matemática ou sobre programação?

Vamos trabalhar com ambos no mesmo ambiente, e o domínio sobre quando usar uma perspectiva ou outra é a principal habilidade para se escrever uma boa **especificação formal**.

No geral, nós, programadores, tendemos à **perspectiva da programação**, e precisamos nos esforçar para descrever algumas coisas na **perspectiva matemática**.

Para isso, primeiro precisamos entender as semelhanças e diferenças

Ainda sobre essa aula

Se você gostar muito do conteúdo dessa aula:

- Maravilha, considere fazer TCC/pesquisa sobre um dos assuntos!
- Sinta-se motivado para a disciplina

Ainda sobre essa aula

Se você gostar muito do conteúdo dessa aula:

- Maravilha, considere fazer TCC/pesquisa sobre um dos assuntos!
- Sinta-se motivado para a disciplina

Se você **não** gostar da aula e ela só te assustar:

- Calma, a disciplina não vai ser nesse nível de loucura
- Começamos tudo do básico na próxima aula, e a maioria do conteúdo dessa aula nem será visto na disciplina

Ainda sobre essa aula

Se você gostar muito do conteúdo dessa aula:

- Maravilha, considere fazer TCC/pesquisa sobre um dos assuntos!
- Sinta-se motivado para a disciplina

Se você **não** gostar da aula e ela só te assustar:

- Calma, a disciplina não vai ser nesse nível de loucura
- Começamos tudo do básico na próxima aula, e a maioria do conteúdo dessa aula nem será visto na disciplina

Pensem nisso como uma apresentação de feira de profissões (para a profissão métodos formais e adjacentes).

Outline

Philip Wadler

A primeira parte dessa aula é baseada na palestra/artigo do Philip Wadler (WADLER, 2015)

Um pouco de história

Em 1928, Hilbert propõe um desafio intitulado *entscheidungsproblem* (problema de decisão).

- Ele acredita que existe um possível algoritmo que diz se uma declaração pode ou não ser provada pelas regras de uma lógica.
- Isso é equivalente a afirmar que a lógica é completa: tudo o que é provado é verdadeiro, e tudo o que e verdadeiro é provável.

Um pouco de história

Em 1928, Hilbert propõe um desafio intitulado *entscheidungsproblem* (problema de decisão).

- Ele acredita que existe um possível algoritmo que diz se uma declaração pode ou não ser provada pelas regras de uma lógica.
- Isso é equivalente a afirmar que a lógica é completa: tudo o que é provado é verdadeiro, e tudo o que e verdadeiro é provável.

Gödel prova a incompletude da lógica em 1931 (teorema da incompletude de Gödel). Ele mostra como representar o seguinte teorema em qualquer lógica capaz de representar aritmética:

"Esta declaração não é provável"

- Se for verdade, não é provável
- Se for provável, não é verdade

Computabilidade

O primeiro computador (ENIAC) surgiu somente em 1946. Na época de Hilbert, o conceito de algoritmo é um conjunto de instruções a ser seguido por um humano.

- Não havia uma definição formal do que é computabilidade/algoritmo

Computabilidade

O primeiro computador (ENIAC) surgiu somente em 1946. Na época de Hilbert, o conceito de algoritmo é um conjunto de instruções a ser seguido por um humano.

- Não havia uma definição formal do que é computabilidade/algoritmo

Enquanto as pessoas acreditavam que Hilbert estava correto, não havia necessidade de definir computabilidade.

- Quando alguém encontrar a solução para o problema, a solução será um algoritmo.

Computabilidade

O primeiro computador (ENIAC) surgiu somente em 1946. Na época de Hilbert, o conceito de algoritmo é um conjunto de instruções a ser seguido por um humano.

- Não havia uma definição formal do que é computabilidade/algoritmo

Enquanto as pessoas acreditavam que Hilbert estava correto, não havia necessidade de definir computabilidade.

- Quando alguém encontrar a solução para o problema, a solução será um algoritmo.

Para mostrar que o *entscheidungsproblem* é indecidível, precisamos da definição de computabilidade

- Para que seja possível mostrar que nenhum possível algoritmo pode resolver o problema.

Correspondências interessantes - está tudo interligado!

Então, as pessoas começam a tentar definir computabilidade. Surpreendentemente, três pessoas independentemente encontram soluções:

- Em maio de 1935, Alonzo Church define o cálculo lambda
- Em julho de 1935, Kurt Gödel (e seu aluno Kleene) define funções recursivas
- Em maio de 1936, Alan Turing define maquinas de Turing

Correspondências interessantes - está tudo interligado!

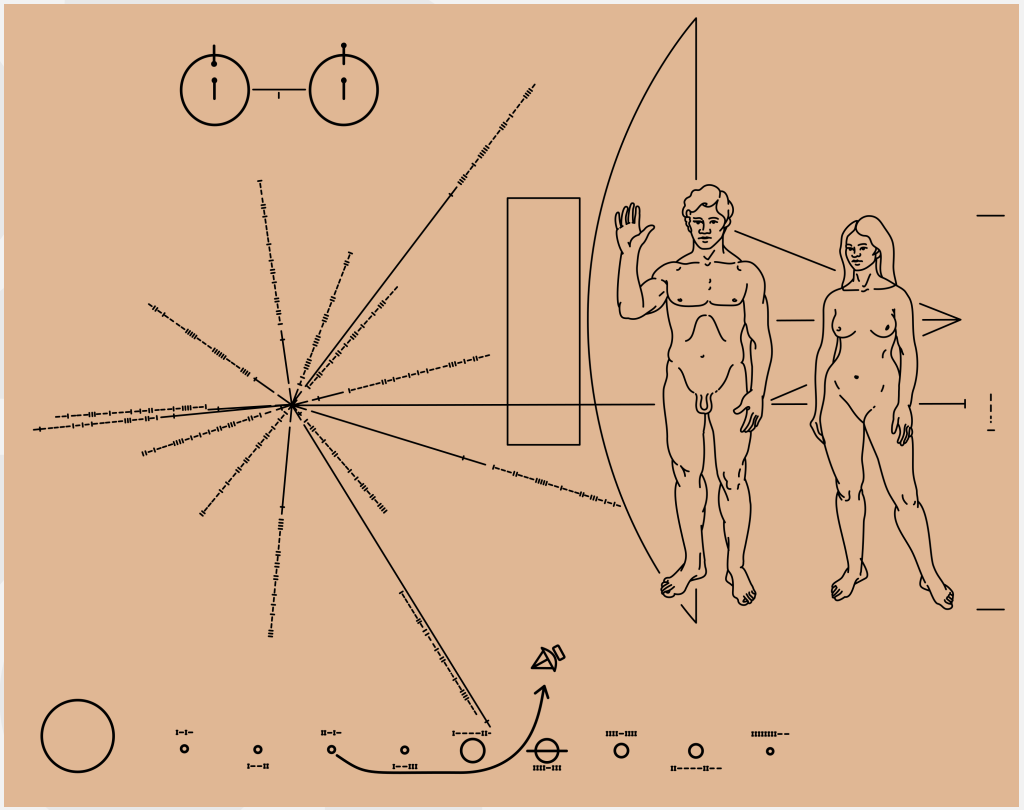
Então, as pessoas começam a tentar definir computabilidade. Surpreendentemente, três pessoas independentemente encontram soluções:

- Em maio de 1935, Alonzo Church define o cálculo lambda
- Em julho de 1935, Kurt Gödel (e seu aluno Kleene) define funções recursivas
- Em maio de 1936, Alan Turing define maquinas de Turing

As três são equivalentes!

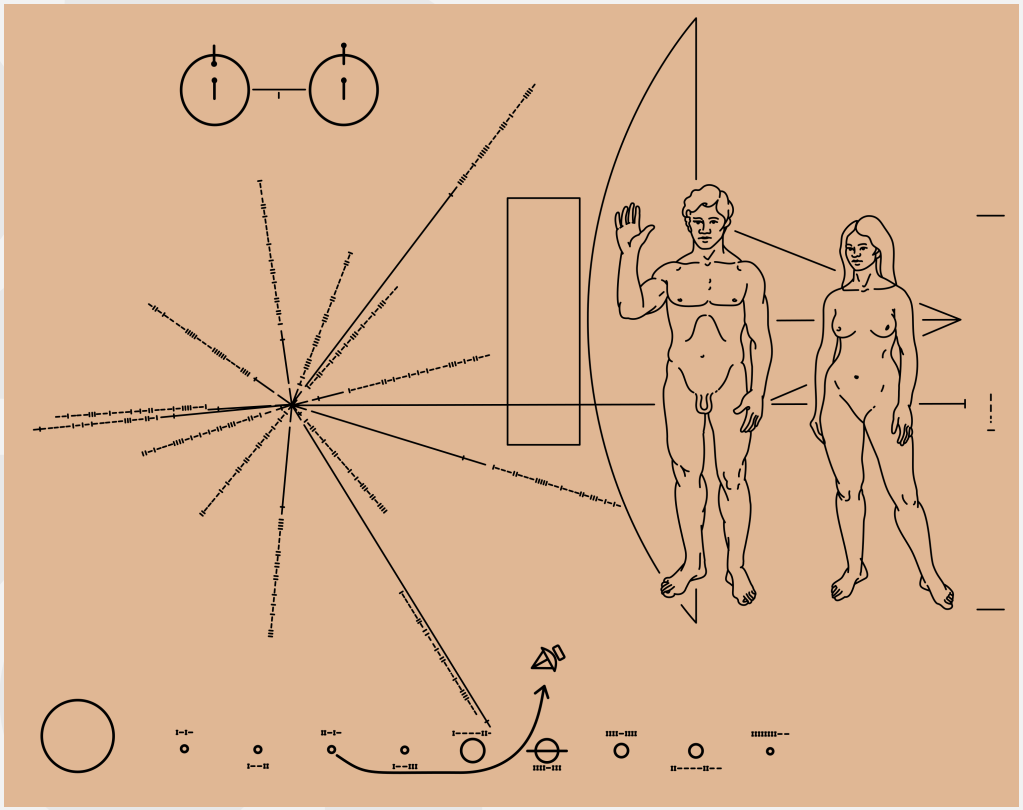
A matemática é inventada ou descoberta?

- (WADLER, 2015) Quais partes dessa imagem um alienígena tem mais chances de entender?



A matemática é inventada ou descoberta?

- (WADLER, 2015) Quais partes dessa imagem um alienígena tem mais chances de entender?



- Quais linguagens de programação eles teriam mais chances de entender?

A matemática é inventada ou descoberta? - Cont.

Wadler faz uma ótima argumentação de que a matemática é descoberta, o que ressoa muito comigo pessoalmente.

- Se Church, Gödel e Turing tivessem inventado (e não descoberto) essas definições, quais as chances delas acabarem sendo equivalentes?

A matemática é inventada ou descoberta? - Cont.

Wadler faz uma ótima argumentação de que a matemática é descoberta, o que ressoa muito comigo pessoalmente.

- Se Church, Gödel e Turing tivessem inventado (e não descoberto) essas definições, quais as chances delas acabarem sendo equivalentes?

Vamos ver mais um argumento de Wadler a favor dessa perspectiva: o Isomorfismo de Curry-Howard.

Isomorfismo de Curry-Howard I

- Proposições como tipos
- Provas como programas
- Simplificação de provas como avaliação de programas

Lógica	Tipos
Falso	`Void`
Verdadeiro	`()`
$a \vee b$	`Either a b`
$a \wedge b$	`(a,b)`
$a \implies b$	`a -> b`

Isomorfismo de Curry-Howard II

Exemplo: implicação e abstração + aplicação

Lógica	Tipos
$\dfrac{}{\Gamma_1, \alpha, \Gamma_2 \vdash \alpha}\,\mathsf{Ax}$	$\dfrac{}{\Gamma_1, x : \alpha, \Gamma_2 \vdash x : \alpha}$
$\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta} \to I$	$\dfrac{\Gamma, x : \alpha \vdash t : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x.t : \alpha \to \beta}$
$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \qquad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta} \to E$	$\dfrac{\Gamma \vdash t : \alpha \to \beta \qquad \Gamma \vdash u : \alpha}{\Gamma \vdash t\ u : \beta}$

Interpretação algébrica para tipos

- A teoria das categorias define um nível ainda mais alto de abstração para enxergar algumas coisas. Um dos exemplos mais simples de uma categoria é a categoria dos conjuntos (e das funções entre eles) (DE FRANÇA, 2019).
- As chamadas categorias cartesianas fechadas podem ser relacionadas a nossa álgebra de ensino médio
  - A categoria dos tipos é uma delas!

Lógica	Tipos	Álgebra
Falso	`Void`	0
Verdadeiro	`()`	1
$a \vee b$	`Either a b`	$a + b$
$a \wedge b$	`(a,b)`	$a * b$
$a \implies b$	`a -> b`	b^a

Exponenciação como tipos de funções I

Vamos escrever tipos função (`a -> b`) como operações de exponenciação da álgebra:

Exponenciação como tipos de funções I

Vamos escrever tipos função (`a -> b`) como operações de exponenciação da álgebra:

- $a^0 = 1$ tem assinatura `Void -> a`. Apenas uma função tem essa assinatura (em Haskell, `absurd`)

Exponenciação como tipos de funções I

Vamos escrever tipos função (`a -> b`) como operações de exponenciação da álgebra:

- $a^0 = 1$ tem assinatura `Void -> a`. Apenas uma função tem essa assinatura (em Haskell, `absurd`)
- $a^1 = a$ tem assinatura `() -> a`. O número de funções com esse tipo é o mesmo número de valores do tipo `a`.
  - Por exemplo, pra `a` sendo `bool`, temos `f x = false` e `f x = true`
  - Qualquer outra versão de `f x` pra esse tipo será equivalente a uma dessas duas

Exponenciação como tipos de funções I

Vamos escrever tipos função (`a -> b`) como operações de exponenciação da álgebra:

- $a^0 = 1$ tem assinatura `Void -> a`. Apenas uma função tem essa assinatura (em Haskell, `absurd`)
- $a^1 = a$ tem assinatura `() -> a`. O número de funções com esse tipo é o mesmo número de valores do tipo `a`.
  - Por exemplo, pra `a` sendo `bool`, temos `f x = false` e `f x = true`
  - Qualquer outra versão de `f x` pra esse tipo será equivalente a uma dessas duas
- $1^a = 1$ tem assinatura `a -> ()`. Apenas uma função tem essa assinatura (`f x = ()`)

Exponenciação como tipos de funções II

- a^{b+c} tem assinatura `Either b c -> a`
  - Para definir uma função desse tipo, temos que definir os casos `Left` com tipo `b -> a` e `Right` com tipo `c -> a`
  - Ou seja, $a^{b+c} = a^b * a^c$

Exponenciação como tipos de funções II

- a^{b+c} tem assinatura `Either b c -> a`
  - Para definir uma função desse tipo, temos que definir os casos `Left` com tipo `b -> a` e `Right` com tipo `c -> a`
  - Ou seja, $a^{b+c} = a^b * a^c$
- $(a^b)^c$ tem assinatura `c -> (b -> a)`
  - Lembrando de currying, sabemos que isso é equivalente a `(c,b) -> a`.
  - Ou seja, $(a^b)^c = a^{(b*c)}$

Exponenciação como tipos de funções II

- a^{b+c} tem assinatura `Either b c -> a`
  - Para definir uma função desse tipo, temos que definir os casos `Left` com tipo `b -> a` e `Right` com tipo `c -> a`
  - Ou seja, $a^{b+c} = a^b * a^c$
- $(a^b)^c$ tem assinatura `c -> (b -> a)`
  - Lembrando de currying, sabemos que isso é equivalente a `(c,b) -> a`.
  - Ou seja, $(a^b)^c = a^{(b*c)}$
- $(a * b)^c$ tem assinatura `c -> (a, b)`
  - Equivalente a um par de funções `c -> a` e `c -> b`
  - Ou seja, $(a * b)^c = a^c * b^c$

Sistemas de tipos

- Com tudo o que vimos até aqui, é seguro afirmar que istemas de tipos são uma parte da ciência da computação que tem uma grande intersecção com a matemática

Sistemas de tipos

- Com tudo o que vimos até aqui, é seguro afirmar que istemas de tipos são uma parte da ciência da computação que tem uma grande intersecção com a matemática
- Sistemas de tipos também são métodos formais: Definimos uma especificação (assinaturas de tipos) e o type checker é nosso sistema de verificação.

Sistemas de tipos

- Com tudo o que vimos até aqui, é seguro afirmar que istemas de tipos são uma parte da ciência da computação que tem uma grande intersecção com a matemática
- Sistemas de tipos também são métodos formais: Definimos uma especificação (assinaturas de tipos) e o type checker é nosso sistema de verificação.
- Estudar matemática avançada pode dar base para usos cada vez mais avançados de sistemas de tipos
  - Tipos dependentes
  - HoTT (Homotopy Type Theory)

Tipos dependentes

Tipos dependentes: quando o tipo depende do valor. No exemplo a seguir, usamos o sistema de tipos para provar que a função `map` não altera o tamanho de um vetor. Isso não é possível sem tipos dependentes.

```
1 map : {A B : Set} {n : Nat} -> (A -> B) -> Vec A n ->
      Vec B n
2 map f [] = []
3 map f (x :: xs) = f x :: map f xs
```

Tipos dependentes

Tipos dependentes: quando o tipo depende do valor. No exemplo a seguir, usamos o sistema de tipos para provar que a função `map` não altera o tamanho de um vetor. Isso não é possível sem tipos dependentes.

```
1 map : {A B : Set} {n : Nat} -> (A -> B) -> Vec A n ->
      Vec B n
2 map f [] = []
3 map f (x :: xs) = f x :: map f xs
```

Tipos dependentes são uma parte importante de muitos assistentes de provas (como Coq e Agda). Bem provável que vamos ver mais sobre eles durante os seminários da disciplina.

Funções parciais

Agora, um caso mais tangível para voltarmos um pouco para a nossa realidade.

Funções parciais

Agora, um caso mais tangível para voltarmos um pouco para a nossa realidade.

- Na matemática, funções podem ser totais ou parciais
  - Para transformar funções parciais em totais, adicionamos o valor bottom ($\perp$) ao co-domínio e mapeamos todos os valores anteriormente indefinidos ao bottom.

Funções parciais

Agora, um caso mais tangível para voltarmos um pouco para a nossa realidade.

- Na matemática, funções podem ser totais ou parciais
  - Para transformar funções parciais em totais, adicionamos o valor bottom ($\bot$) ao co-domínio e mapeamos todos os valores anteriormente indefinidos ao bottom.
- Na computação, funções parciais precisam retornar o tipo soma. Dependendo da linguagem, pode ser algo como:
  - `f(x: int): int | undefined`
  - `int -> Maybe int`

Outline

Erros vs indefinições

- Na matemática, algumas fórmulas são indefinidas.
  - Divisão não está definida para denominador 0
  - Exponenciação não está definida para 0^0

Erros vs indefinições

- Na matemática, algumas fórmulas são indefinidas.
  - Divisão não está definida para denominador 0
  - Exponenciação não está definida para 0^0
- Na programação, precisamos **definir** o que acontece nesses cenários
  - Normalmente, o que queremos é reportar algum tipo de erro
  - Programação envolve humanos. Humanos erram e precisam entender aonde erraram.
    - "Opa, você tentou dividir por 0 na linha X coluna Y" - pode salvar alguém de horas de debugging

Funções vs Maps

Funções matemáticas podem ser programadas através de funções ou `Maps` (KONNOV, 2024). Pense nos exemplos

1. Função de um número para seu dobro.
2. Função do nome da pessoa para sua idade.

Funções vs Maps

Funções matemáticas podem ser programadas através de funções ou `Maps` (KONNOV, 2024). Pense nos exemplos

1. Função de um número para seu dobro.
2. Função do nome da pessoa para sua idade.

Na programação, vamos considerar os fatores

- Uso de Memória
- Velocidade de resposta

Funções vs Maps

Funções matemáticas podem ser programadas através de funções ou `Maps` (KONNOV, 2024). Pense nos exemplos

1. Função de um número para seu dobro.
2. Função do nome da pessoa para sua idade.

Na programação, vamos considerar os fatores

- Uso de Memória
- Velocidade de resposta

Numa especificação formal, memória e velocidade não importam da mesma forma

Implementação vs definição

Imagine a seguinte definição:

- Dada uma função que ordena uma lista de inteiros

O que você pensou sobre essa função?

Implementação vs definição

Imagine a seguinte definição:

- Dada uma função que ordena uma lista de inteiros

O que você pensou sobre essa função?
Bem possível que pensou em um ou mais algoritmos de ordenação (i.e. bubble sort, selection sort, quick sort)

Implementação vs definição

Imagine a seguinte definição:

- Dada uma função que ordena uma lista de inteiros

O que você pensou sobre essa função?
Bem possível que pensou em um ou mais algoritmos de ordenação (i.e. bubble sort, selection sort, quick sort)

Na matemática, não importa **como** a ordenação é feita. A função em questão poderia ser descrita mais precisamente por:

- Seja $f : \overline{\mathbb{Z}} \to \overline{\mathbb{Z}}$ tal que $f(x)_i \leq f(x)_{i+1}$ para todo $i \in [0, |x| - 1)$

Implementação vs definição

Imagine a seguinte definição:

- Dada uma função que ordena uma lista de inteiros

O que você pensou sobre essa função?
Bem possível que pensou em um ou mais algoritmos de ordenação (i.e. bubble sort, selection sort, quick sort)

Na matemática, não importa **como** a ordenação é feita. A função em questão poderia ser descrita mais precisamente por:

- Seja $f : \overline{\mathbb{Z}} \to \overline{\mathbb{Z}}$ tal que $f(x)_i \leq f(x)_{i+1}$ para todo $i \in [0, |x| - 1)$

Numa especificação formal, se não há relevância no algoritmo de ordenação (contanto que ele, de fato, ordene), podemos economizar recursos na verificação ao especificar somente a propriedade de ordenação.

Em resumo

- Matemática e programação estão muito interligados
- Contudo, há diferenças nos níveis de abstração entre o que costumamos descrever em definições matemáticas e em programas.
  - Em programas, nos importamos com memória e velocidade, o que normalmente não é representado na matemática.
  - Em programas, precisamos detalhar **como** cada função é implementada, enquanto na matemática podemos somente definir funções pelas suas propriedades.
    - Inclusive, precisamos detalhar o que acontece em casos indefinidos pela matemática, como divisão por 0.

Referências

DE FRANÇA, F. O. **Tipo função**. Disponível em: <https://haskell.pesquisa.ufabc.edu.br/teoria-das-categorias/09-tipofuncao/>.

KONNOV, I. **You should not care about memory in protocol specifications**. Disponível em: <https://konnov.github.io/protocols-made-fun/quint/2024/01/14/maps.html>.

WADLER, P. Propositions as types. **Commun. acm**, v. 58, n. 12, p. 75–84, Nov. 2015.

Programação e matemática não são a mesma coisa

Aula para disciplina de Métodos Formais

Gabriela Moreira

Departamento de Ciência da Computação - DCC
Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC

07 de agosto de 2024